ΑΣΚΗΣΗ 1η. (Η-W)

Έστω η εξίσωση $y' = ay + b$, $a, b \in C([0,+\infty))$

ΝΔΟ i) Αν $a(x) \le m$, $x \ge 0$ όπου m είναι αρνητική σταθερά και b είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$ τότε κάθε λύση της (Ε) είναι φραγμένη

ii) Αν $\alpha(x) \ge k$, $x \ge 0$ όπου k είναι μια θετική σταθερά και η b είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$, τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση της (Ε) που είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$ και δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = -\int_x^{\infty} b(s) \cdot e^{\int_s^x a(t)\,dt}, \quad x \ge 0$$

Λύση

Η εξίσωση Clairaut:

Η εξίσωση Clairaut είναι μορφής:

$$y = x\cdot y' + f(y') \qquad f \in C'(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow y' = y' + x\cdot y'' + f'(y')\cdot y'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = xy'' + f'(y')\cdot y''$$

Ενώ έπειτα θέτουμε $y' = u$

Άρα $0 = xu' + f'(u)u' \Rightarrow 0 = u'(x + f'(u)) \Rightarrow$

$\Rightarrow u' = 0$ ή $x + f'(u) = 0 \Rightarrow u = c$ ή

Πχ

$$y = x\cdot y' + 2(y')^2 \quad (1)$$

Λύση

$$y' = y' + x\cdot y'' + 2\cdot 2y'\cdot y''$$

$$0 = xy'' + 4y'\cdot y''$$

$y' = u$

Άρα, $0 = xu' + 4u\cdot u' \Rightarrow u'(x + 4u) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u' = 0$ ή $x + 4u = 0$

$u(x) = c$ ή $u = -\frac{x}{4}$, $x \neq 0$

$y'(x) = c$

$\boxed{y(x) = cx + c_1}$

Με αντικατάσταση στην (1)

$cx + c_1 = \cancel{xc} + 2(c)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 = 2c^2$

Άρα, $y(x) = cx + 2c^2$

Άρα, $y' = -\frac{x}{4} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{8} + c_2$

Αν αντικαταστήσουμε στην (1)

$-\frac{x^2}{8} + c_2 = x\left(-\frac{x}{4}\right) + 2\left(-\frac{x}{4}\right)^2$

$\Rightarrow -\frac{x^2}{8} + c_2 = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_2 = 0$

Άρα, $y(x) = -\frac{x^2}{8}$

Έχουμε μια οικογένεια καμπυλών

Η εξίσωση Lagrange.

Η εξίσωση Lagrange είναι μορφής

$$y = x\cdot \varphi(y') + f(y'), \quad \varphi, f \in C'(\mathbb{R})$$

$$y' = \varphi(y') + x\varphi'(y')y'' + f'(y')y''$$

Θέτω $u = y'$, έχουμε

$$u = \varphi(u) + x\varphi'(u)u' + f'(u)u' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u - \varphi(u) = [x\cdot\varphi'(u) + f'(u)]u' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u - \varphi(u))\frac{dx}{du} = x\cdot\varphi'(u) + f'(u) \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{du} - \frac{\varphi'(u)}{u-\varphi(u)}x = \frac{f'(u)}{u-\varphi(u)}$$, γραμμική α' τάξης.

Πχ

$$y = x(y')^2 + (y')^2$$ (Μερική λύση η $y(x) = c$)

Λύση

$$y' = (y')^2 + x \cdot 2y' \cdot y'' + 2y' \cdot y''$$

Όταν $y' = u$,

$$u = u^2 + x \cdot 2u \cdot u' + 2uu' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = u(u + x \cdot 2u' + 2u')$$

• Για $u = 0 \rightsquigarrow y' = 0 \Rightarrow y = c \xrightarrow[\text{στην εξίσωση}]{\text{Αντικατάσταση}} y = 0$

• Για $u \neq 0 \rightsquigarrow 1 = u + u' \cdot 2(x+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2(x+1)u' + u = 1 \quad , \quad x \neq -1$$

$$\Rightarrow u' + \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2(x+1)}$$

και εργαζόμαστε για x δεξιά του -1 και για x αριστερά του -1

⋮

Τέλος, $y(x) = \left(\sqrt{c} + \sqrt{x+1}\right)$, $x \geq -1$, $c \geq 0$

όμοια και για την $2^η$ περίπτωση $(x \leq -1)$